Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas

CLASES DE PREPARADURIAS COMPLETA:

MATEMÁTICAS 2

TRIMESTRE

ENERO – MARZO 2012

Profesor asignado: Valera, Humberto.

Previo:

Enero – Marzo 2011, *Profesor asignado*: **Palma, Ligia.**

Enero – Marzo 2010, *Profesor asignado:* **Núñez, Ynes**.

Enero – Marzo 2009, *Profesor asignado:* .

Enero – Marzo 2008, *Profesor asignado:* **Montezuma, Aida**.

Preparador:

Miguel Guzmán

Ingeniería Mecánica 06"

Sartenejas; Septiembre 2012

TEMARIO.

Prepa del: **Viernes 13 – 1 – 2012**

- Anti derivada
- Anti derivada trigonométrica
- Integración (Método de completación de cuadrado)
- Área bajo curva (Riemann)

Prepa del: **Viernes 20 – 01 – 2012**

- Integral definida
- U sustitución.
- Paridad e imparidad de funciones e integrales.
- Teorema de valor medio para

Prepa del: **Viernes 27 – 01 – 2012**

- Área bajo la curva
- Solido en revolución. Método de Cascarones, Arandelas y Disco.
- Primer teorema fundamental del cálculo.

Prepa del: **Viernes 10 – 02 – 2012**

- Funciones Transcendentales. Derivación.
- Funciones Transcendentales. Integración.

Prepa del: **Viernes 17 – 02 – 2012**

- Integración por parte
- Formula de reducción.
- Sustitución variada.
- Ecuaciones de funciones transcendentales.

Prepa del: **Viernes 24 – 02 – 2012**

- Integración, técnicas varias.
- Derivación logarítmica.
- Demostración de identidad.
- Ecuaciones de funciones transcendentales.
- EDO Bernoulli
- EDO cambio variable
- EDO Aplicaciones

Prepa del: **Viernes 2 – 03 – 2012**

- Integrales trigonométrica
- Sustitución trigonométrica.

Prepa del: **Viernes 9 – 03 – 2012**

- Integrales por fracciones simples.

Prepa del: **Viernes 16 – 03 – 2012**

- Nuevas Indeterminaciones
- Integrales Impropias
- Convergencia y divergencia de integrales

Prepa del: **Viernes 23 – 03 – 2012 REPASO TERCER PARCIAL.**

Preparado por: Miguel Guzmán

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 13-01-2012

Miguel Guzmán (mag369@gmail.com)

1.- Resuelva las siguientes integrales. (Anti derivadas)

$$a.- \int \left(\frac{(t^2+1)(t^2-1)}{\sqrt[3]{t^2}}\right) dt$$

Solución. Desarrollamos el numerador; $(t^2+1)(t^2-1) = t^4 - 1$; $\quad \sqrt[3]{t^2} = t^{\frac{2}{3}}$

Luego la integral queda

$$I = \int \frac{t^4-1}{t^{\frac{2}{3}}} dt \Rightarrow \quad I = \int t^{\frac{10}{3}} - t^{-\frac{2}{3}} dt \Rightarrow \quad I = \frac{t^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} - \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C \Rightarrow \quad I = 3\left(\frac{\sqrt[3]{t^{13}}}{13} - \sqrt[3]{t}\right) + C$$

$$b.- \int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx$$

Solución. Recordemos que $(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1)$, entonces queda

$$I = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx = \int (x^2+x+1)dx \quad \Rightarrow \quad I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$c.- \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$$

Solución. Ya que la variable a integrar es (x), lo que queda que (n) es constante por lo tanto

$$I = n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx \Rightarrow \quad I = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C \Rightarrow \quad I = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} =< \quad I = (nx)^{\frac{1}{n}} + C$$

$$d.- \int \cos(3x)\, dx$$

Solución. Sea $u = 3x \Rightarrow du = 3dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx$

$$I = \int \frac{1}{3}\cos(u)\, du = \frac{1}{3}\sin(u) + C \quad = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$$

$$e.- \int \frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}dx$$

Solución. Multiplicamos por la conjugada del denominador $(1-\sin(x))$, se tiene

$$I = \int \frac{\cos^2(x)\,(1-\sin(x))}{\cos^2(x)}dx => \;\; I = x+\cos(x)+C$$

$$f.- \int \frac{1}{9+x^2}dx$$

Solución. Tenemos $x^2+9 = \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{9}+1\right) = \frac{1}{9}\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right)$ $\;\; Sea\;\; u = \frac{x}{3} \;=>\;\; du = \frac{dx}{3}$

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9}\int \frac{3du}{u^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctan}(u)+C => I = \frac{1}{3}\operatorname{arctan}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

$$g.- \int \frac{\sin(2x)}{(1+\sin^2(x))^2}dx$$

Solución. Si tomamos el denominador como cambio de variable, tenemos

$u = 1+\sin^2(x) \;\; => \;\; du = 2\sin(x)\cos(x)\,dx => du = \sin(2x)\,dx$ entonces

$$I = \int \frac{du}{u^2} => \;\; I = -\frac{1}{u}+C \;\; => \;\; I = -\frac{1}{1+\sin^2(x)}+C$$

$$h.- \int \frac{x+\sqrt{\operatorname{atan}(2x)}}{1+4x^2}dx$$

Solución. Separamos la fracción.

$$I = \int \frac{x}{1+4x^2}+\frac{\sqrt{\operatorname{atan}(2x)}}{1+4x^2}dx = \underbrace{\int \frac{x}{1+4x^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\sqrt{\operatorname{atan}(2x)}}{1+4x^2}dx}_{I_2}$$

Sea $I_1 = \int \frac{x}{1+4x^2}dx$, realizamos una sustitución, sea $u = 1+4x^2 \;\; => \;\; du = 8xdx$

$$I_1 = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} => \;\; I_1 = \frac{1}{8}\ln(u\,)+C \;\; => \;\; I_1 = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2)+C_1$$

Para $I_2 = \int \frac{\sqrt{\operatorname{atan}(2x)}}{1+4x^2}dx$, se hace un cambio de variable sea $u = \operatorname{atan}(2x) => \;\; du = \frac{1}{1+4x^2}2dx$

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{u}du}{2} \;=>\; I_2 = \frac{\frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \;=>\; I_2 = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \;=>\; I_2 = \frac{1}{3}(\mathrm{atan}(2x))^{\frac{3}{2}} + C_2$$

Luego

$$I = \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + \frac{1}{3}(\mathrm{atan}(2x))^{\frac{3}{2}} + C$$

$$i.- \int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx$$

Solución. Sea $u = 9x^2 - 12x + 8 \;=>\; du = (18x-12)dx$ además "$2x+3 = \frac{1}{9}(18x-12+39)$"

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{18x-12+39}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\left[\underbrace{\int \frac{18x-12}{9x^2-12x+8}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{39}{9x^2-12x+8}dx}_{I_2}\right]$$

$$I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|9x^2 - 12 + 8| + C$$

Para I_2 completamos cuadrado, $9\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}\right) = 9\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right)$

$$I_2 = \frac{39}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}} \overset{\substack{u=x-\frac{2}{3} \\ du=dx}}{=} \frac{39}{9}\int \frac{du}{u^2+\frac{4}{9}} = \frac{39.9}{9}\int \frac{du}{9u^2+4} = \frac{39}{4}\int \frac{du}{\frac{9}{4}u^2+1} = \frac{39}{4}\int \frac{du}{\left(\frac{3}{2}u\right)^2+1} \underbrace{=}_{\substack{a=\frac{3}{2}u \\ da=\frac{3}{2}du}}$$

$$\frac{13}{2}\int \frac{da}{a^2+1} = \frac{13}{2}\arctan(a) + C = \frac{13}{2}\arctan\left(\frac{3}{2}x - 1\right) + C$$

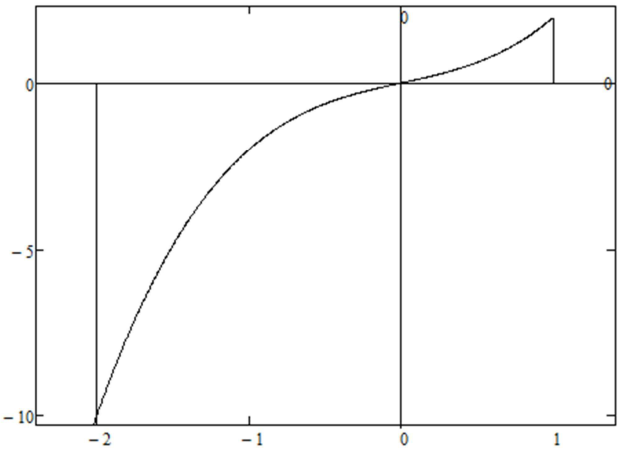
$$I = \frac{1}{9}[I_1 + I_2] => I = \frac{1}{9}\ln(9x^2 - 12x + 8) + \frac{13}{18}\arctan\left(\frac{3}{2}x - 1\right) + C$$

$$j.- \int x^5(x^3+3)^{\frac{1}{4}}dx$$

Solución. Tenemos $x^3x^2\sqrt[4]{x^3+3}$, sea $u = x^3 + 3 \;=>\; du = 3x^2dx \;; u - 3 = x^3$

$$I = \int (u-3)\sqrt[4]{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt[4]{u^5} - 3\sqrt[4]{u}du = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\sqrt[4]{u^9} - 3\frac{4}{5}\sqrt[4]{u^5}\right) + C = \frac{4}{27}\sqrt[4]{(x^3+3)^9} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{(x^3+3)^5} + C$$

2.- Determine el área de la región limitada por $y = x^3 + x$ con el eje x y las rectas $x = -2\ , x = 1$.



Riemann, debemos darnos cuenta que hay un área negativa y otra positiva, luego

$$\Delta x = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n}\ ;\ x_0 = -2\ ;\ x_1 = -2 + \frac{2}{n}\ ;\ x_2 = -2 + \frac{4}{n}\ ;\ x_3 = -2 + \frac{6}{n} \quad x_i = -2 + \frac{2i}{n}$$

Por punto derecho tenemos que

$$\Delta A = \frac{2}{n} f(x_i) = \frac{2}{n} f\left(-2 + \frac{2i}{n}\right) \Rightarrow\ \Delta A = \frac{2}{n}\left(\left(-2 + \frac{2}{n} i\right)^3 + \left(-2 + \frac{2}{n} i\right)\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{n}\left(\left(-2 + \frac{2}{n} i\right)^3 + \left(-2 + \frac{2}{n} i\right)\right) \Rightarrow\ A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{8}{n^3} i^3 - \frac{24}{n^2} i^2 + \frac{26}{n} i - 10\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{24}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{26}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 10n\right) = 4 - 16 + 26 - 20 = -6$$

Por otro lado,

$$\Delta x = \frac{1-(0)}{n} = \frac{1}{n}\ ;\ x_0 = 0\ ;\ x_1 = \frac{1}{n}\ ;\ x_2 = \frac{2}{n}\ ;\ x_3 = \frac{3}{n} \quad x_i = \frac{i}{n}$$

Por punto derecho tenemos que

$$\Delta A = \frac{1}{n} f(x_i) = \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \Rightarrow\ \Delta A = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n} i\right)^3 + \left(\frac{1}{n} i\right)\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n} i\right)^3 + \left(\frac{1}{n} i\right)\right) \Rightarrow\ A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{n^3} i^3 + \frac{1}{n} i\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Luego el área total será

$$A = -(-6) + \frac{3}{4} \;\; => \;\; A = \frac{27}{4}$$

Integral

$$A = \int_{-2}^{1}(x^3 + x)dx = \int_{0}^{1}(x^3 + x)dx - \int_{-2}^{0}(x^3 + x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)_0^{-2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + (4 + 2)$$

$$=> A = \frac{3}{4} + 6 \;\; => \;\; A = \frac{27}{4}$$

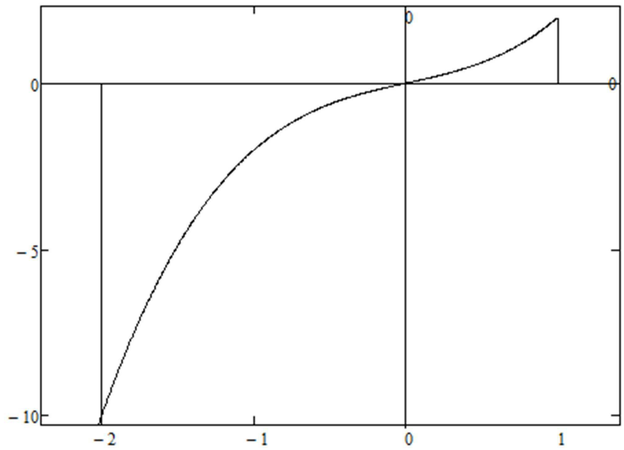
UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 20-01-2012

MIGUEL GUZMAN (magt369@gmail.com)

1.-Determine el área de la región limitada por $y = x^3 + x$ con el eje x y las rectas $x = -2$, $x = 1$



Riemann, debemos darnos cuenta que hay un área negativa y otra positiva, luego

$$\Delta x = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n} \ ; \ x_0 = -2 \ ; \ x_1 = -2 + \frac{2}{n} \ ; \ x_2 = -2 + \frac{4}{n} \ ; \ x_3 = -2 + \frac{6}{n} \quad x_i = -2 + \frac{2i}{n}$$

Por punto derecho tenemos que

$$\Delta A = \frac{2}{n} f(x_i) = \frac{2}{n} f\left(-2 + \frac{2i}{n}\right) => \ \Delta A = \frac{2}{n}\left(\left(-2 + \frac{2}{n}i\right)^3 + \left(-2 + \frac{2}{n}i\right)\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{n}\left(\left(-2 + \frac{2}{n}i\right)^3 + \left(-2 + \frac{2}{n}i\right)\right) => \ A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{8}{n^3}i^3 - \frac{24}{n^2}i^2 + \frac{26}{n}i - 10\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{24}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{26}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 10n\right) = 4 - 16 + 26 - 20 = -6$$

Por otro lado,

$$\Delta x = \frac{1-(0)}{n} = \frac{1}{n} \ ; \ x_0 = 0 \ ; \ x_1 = \frac{1}{n} \ ; \ x_2 = \frac{2}{n} \ ; \ x_3 = \frac{3}{n} \quad x_i = \frac{i}{n}$$

Por punto derecho tenemos que

$$\Delta A = \frac{1}{n} f(x_i) = \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) => \ \Delta A = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}i\right)^3 + \left(\frac{1}{n}i\right)\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}i\right)^3 + \left(\frac{1}{n}i\right)\right) \;=>\; A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{n^3}i^3 + \frac{1}{n}i\right)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Luego el área total será

$$A = -(-6) + \frac{3}{4} \;=>\; A = \frac{27}{4}$$

2.- Se sabe que

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 0\,; \quad \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = 2$$

Calcule el valor de la integral $I = \int_0^{\pi} (\cos(x) + 4)^2 dx$

Solución.

Desarrollamos el producto notable. $(\cos(x) + 4)^2 = \cos^2(x) + 8\cos(x) + 16$

$$A = \int (1 - \sin^2(x)) + 8\cos(x) + 16)\,dx = \int 17dx + 8\int \cos(x)\,dx - \int \sin^2(x)\,dx$$

Evaluamos en los límites

$$I = 17\int_0^{\pi} dx + 8\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = 17\pi + 8(2) - \frac{\pi}{2} \;=>\; I = \frac{33\pi + 32}{2}$$

3.- Integre

$$a.- \int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^6}} dx$$

Solución.

Si hacemos la sustitución $u = x^3 \;=>\; du = 3x^2 dx$ por lo que

$$I = \int \frac{1}{3}\frac{du}{\sqrt{25 - u^2}} \;=>\; I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{5\sqrt{1 - \frac{u^2}{25}}} du \;=>\; I = \frac{1}{15}\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{5}\right)^2}} du$$

Haciendo $a = \frac{u}{5} \;=>\; da = \frac{du}{5}$

Se tiene

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}da \quad => \quad I = \frac{1}{3}\arcsin(a) + C \quad => \quad I = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x^3}{5}\right) + C$$

$$b.- \int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Solución.

Si separemos la fracción se tendrá que

$$I = \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I_1} + 3\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{I_2}$$

Se tiene que $I_2 = \arcsin(x) + C$

Para I_1 se tiene un cambio. $u = 1 - x^2 \quad => \quad du = 2xdx$ por lo que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du \quad => \quad I_1 = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 \quad => \quad I_1 = \sqrt{1-x^2} + C_1$$

Lo que se concluye

$$I = 3\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + K$$

4.- Pruebe que la función definida

$$H(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}dt$$

Es constante.

Solución. Para saber si una función es constante su primera derivada debe ser 0, luego buscamos que $H'(x) = 0$, veamos (Por primer teorema fundamental del cálculo)

$$H'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2+1}(1) = \frac{x^2}{1+x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Luego se concluye que $H(x)$ es una función constante.

5.- Evalúe la integral definida.

$$a.- \int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$$

Solución. Sea $u = (1+2x^3) \Rightarrow du = 6x^2dx$; $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=3 \end{cases}$

$$I = \int_1^3 \frac{1}{6}u^5 du = \frac{1}{36}u^6 \Big|_1^3 \Rightarrow I = \frac{1}{36}(3^6-1) = \frac{1}{36}(729-1) = \frac{1}{36}(728) \Rightarrow I = \frac{182}{9}$$

$$b.- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\sin(x)}{1+x^2}dx$$

Solución. Nos damos cuenta que es un intervalo simétrico y además

$\frac{x^2}{1+x^2}$ **PAR** y $\sin(x)$ **IMPAR** luego $I = 0$

6.- Evalúe el valor de la integral

$$a.- \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t[\![t^2]\!]}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

Solución. Veamos la parte entera de t^2, $[\![t^2]\!] = \begin{cases} \dots \\ 1 \quad si \quad 1 \le t^2 < 2 \\ 0 \quad si \quad 0 \le t^2 < 1 \end{cases}$

Se tiene que

$$I = \int_0^1 \frac{t(0)}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t(1)}{\sqrt{1+t^2}}dt \Rightarrow I = \sqrt{1+t^2}\Big|_1^{\sqrt{2}} \Rightarrow I = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$b.- \int_{-1}^{1}\left(x^5 - 4x^9 + \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

Solución. Notamos que es un intervalo simétrico, entonces

$$I = \int_{-1}^1 x^5dx - 4\int_{-1}^1 x^9dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2}dx = 0+0+0 = 0$$

Ya que $f(x) = x^5 = -(-x^5) = -f(-x)$ $IMPAR$; $f(x) = x^9 = -(-x^9) = -f(-x)$ $IMPAR$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2};\ f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(1+(-x)^2)^2} = -\frac{\sin(x)}{(1+x^2)^2} = -f(x)\ IMPAR$$

7.- Sea la función $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $I(1,2)$, sea las particiones definida por

$$P = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, 2\right\}$$

Determine una aproximación del área bajo $f(x)$ en I usando P.

Solución.

Discretizamos el intervalo.

$$\Delta x_0 = \left(\frac{5}{4} - 1\right) = 0{,}25\ ;\ \ \Delta x_1 = \left(\frac{7}{5} - \frac{5}{4}\right) = 0{,}15\ \ ;\ \ \Delta x_2 = \left(2 - \frac{7}{5}\right) = 0{,}6$$

Usamos punto derecho, $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = \frac{7}{5}$; $x_3 = 2$

El área será $A = \Delta x_0 f(x_1) + \Delta x_1 f(x_2) + \Delta x_2 f(x_3)$, donde $f(x_1) = \frac{3}{16}$; $f(x_2) = \frac{6}{25}$; $f(x_3) = 0$

$$A = \frac{663}{8000} \approx 0.083$$

Por punto izquierdo, $x_0 = 1$; $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = \frac{7}{5}$

El área será $A = \Delta x_0 f(x_0) + \Delta x_1 f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2)$, donde $f(x_0) = 0$

$$A = \frac{1377}{8000} \approx 0.172$$

El área real será

$$\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)dx = \frac{1}{6}$$

8.- Usando el teorema de valor medio para integrales, halle el valor medio de la función

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad \text{en } I(0,2)$$

Solución.

TVM para integrales es

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx = f(c)(2-0) \Rightarrow -\left.\frac{1}{x+1}\right|_0^2 = 2\,f(c) \Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 = 2f(c) \Rightarrow \frac{1}{3} = f(c)$$

$$\frac{1}{(c+1)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow c^2 + 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = -1 \pm \sqrt{3}$$

Por lo cual la solución dentro del intervalo $c = -1 + \sqrt{3}$

9.- Determine la función $f(t)$ y el valor de a tal que se cumpla

$$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

Solución.

Derivamos la igualdad y por primer teorema fundamental del calculo

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x}} \quad => \quad f(x)=\sqrt{x^3}$$

Evaluamos la igualdad para $x=a$

$$6+\int_a^a \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{a} \quad => \quad 6=2\sqrt{a} => \quad a=9$$

10.- Sea la función $f(x)$ continua, decreciente y positiva, demuestre que

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 0$$

Tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

Solución.

La función es decreciente luego, $f(x)>f(x+1)$, y también es positiva entonces

$$0<f(x+1)<f(x)$$

Por el teorema de acotación.

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Se tiene

$$0\big((x+1)-x\big)\leq \int_x^{x+1} f(t)dt \leq f(x)\big((x+1)-x\big) \quad => \quad 0\leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq f(x)$$

Tomando límites, por teorema del emparedado.

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 0$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

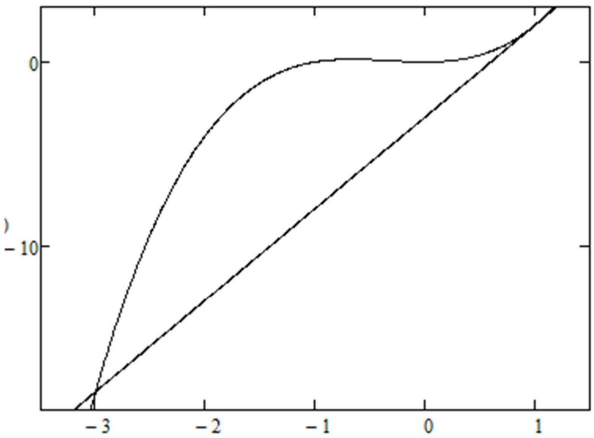
PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 27-01-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Halle el área bajo la curva de ecuación $y(x) = x^3 + x^2$ limitada por la recta tangente en el punto $A(1,2)$.

Solución.



La ecuación de la recta en el punto, $(y - y_0) = m(x - x_0)$

Donde la pendiente es la derivada evaluada en 1:

$$y' = 3x^2 + 2x \Rightarrow y'(1) = 5 = m$$

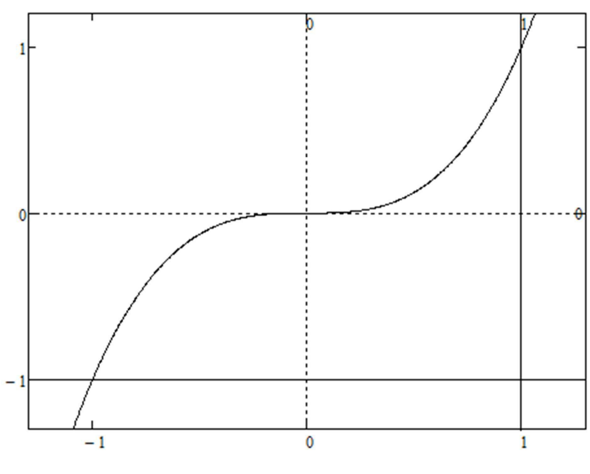
La ecuación será $y = 5x - 3$

$$\int_{-3}^{1} \big((x^3 + x^2) - (5x - 3)\big)dx \; = \frac{64}{3}$$

2.- Calcule el área bajo las curvas dadas.

$$a. - \; f(x) = x^3 \quad ; \quad h(x) = -1 \quad ; \quad x = 1$$

Solución.



El area bajo las curva sera

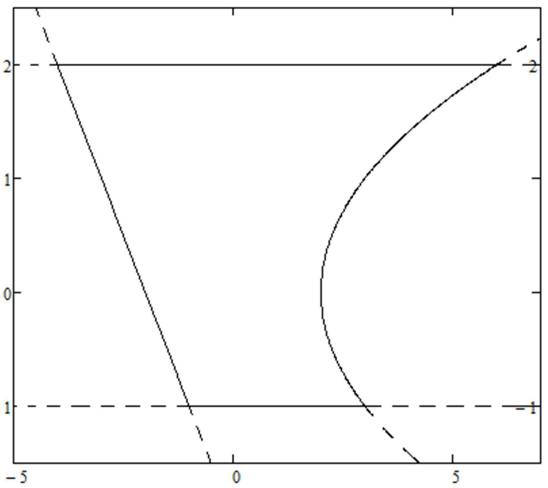
$$A = \int_{-1}^{1} \big(x^3 - (-1)\big)dx$$

$$A = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$A = 2$$

$$b.- \ y^2 = x - 2 \ \ ; \ \ y + x + 2 = 0 \ ; \ \ \ y = -1 \ \ \ ; y = 2$$

Solución.



El área bajo la curva viene más fácil si integramos con respecto al eje y

$$A = \int_{-1}^{2} \left(y^2 + 2 - (-2 - y)\right) dy$$

$$A = \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y\right)_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2 + 8\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 4\right)$$

$$A = \frac{33}{2}$$

4.- Plantear el integral o integrales que permitan calcular el área comprendida entre las curvas de ecuación: $y = 6 - x \ \ ; \ \ y = x^2$

a.- Usando rebanadas Verticales.

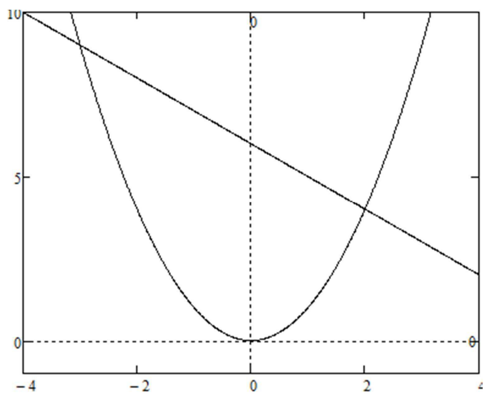
b.- Usando rebanadas Horizontales.

Solución.

Realizando las gráficas para determinar las intersecciones.

$$6 - x = x^2 \quad => \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$



Usando rebanadas Verticales se tiene:

$$A = \int_{-3}^{2} (6 - x) - (x^2) dx$$

Usando rebanadas Horizontales.

$$A = \int_{0}^{4} \sqrt{y} - (-\sqrt{y})\, dy + \int_{4}^{9} 6 - y - (-\sqrt{y}) dy$$

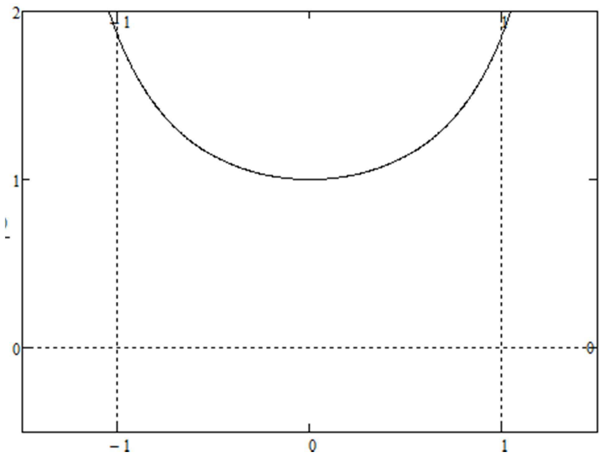
Si se resuelve la integral da como resultado.

$$A = \frac{125}{6}$$

5.- Halle el volumen que se genera al rotar el área dada sobre el eje especificado.

$a.- \quad y = \sec(x) \;\; ; \;\; x = -1 \; ; \;\; x = 1 \quad$ eje x

Solución. El mejor método para determinar este volumen es el DISCO



$$V = \int_{-1}^{1} \pi(\sec(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \sec^2(x)\, dx$$

$$V = \pi(\tan(x))_{-1}^{1}$$

$$V = \pi(\tan(1) - \tan(-1))$$

$$V = 2\pi \tan(1)$$

$b.- \quad x = 4y^2 - y^3 \;\; ; \;\; x = 0 \quad y = 2 \quad$ eje x

Solución. Usando el método de CASCARONES

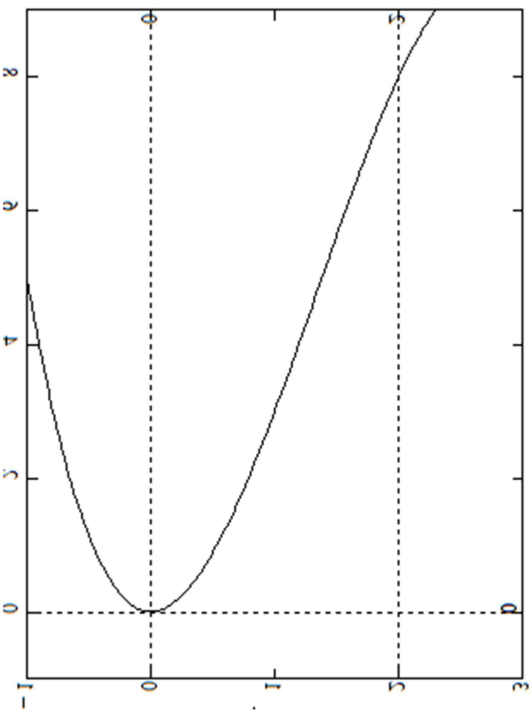
$$V = \int_0^2 2\pi(y)(4y^2 - y^3)dy$$

Resolvemos la integral

$$V = 2\pi \int_0^2 4y^3 - y^4\, dy$$

$$V = 2\pi\left(y^4 - \frac{y^5}{5}\right)_0^2$$

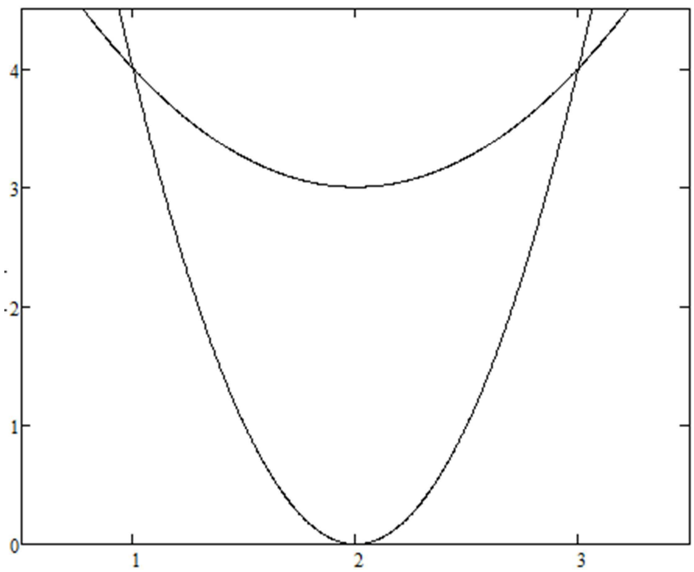
$$V = 2\pi\left(16 - \frac{32}{5}\right) = \frac{96}{5}\pi$$



$$d.- \quad y = 4(x-2)^2 \ ; \quad y = x^2 - 4x + 7 \qquad \text{eje } y$$

Solución.

Debemos hallar la intercepción de las curvas.



$$4(x^2 - 4x + 4) = x^2 - 4x + 7$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 => 3(x-3)(x-1) = 0$$

Usando el método de CASCARONES.

$$V = 2\pi \int_1^3 x(x^2 - 4x + 7 - 4(x-2)^2)dx$$

$$V = 2\pi \int_1^3 x(-3x^2 + 12x - 9)dx$$

$$V = 2\pi \int_1^3 -3x^3 + 12x^2 - 9x\,dx$$

$$V = 2\pi\left(-\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - \frac{9}{2}x^2\right)_1^3 = 2\pi\left(\left(-\frac{3}{4}81 + 4\,27 - \frac{9}{2}9\right) - \left(-\frac{3}{4} + 4 - \frac{9}{2}\right)\right)$$

$$V = 16\pi$$

Si realizamos este mismo ejercicio pero con el eje de rotación $x = 5$, dese cuenta que la integral queda

$$V = 2\pi \int_1^3 \overbrace{(5-x)}^{RADIO}\overbrace{(x^2 - 4x + 7 - 4(x-2)^2)}^{ALTURA}\,dx = 24\pi$$

OJO, El radio del solido es aquella distancia que describe el sólido "VISTO" desde el eje de ROTACION.

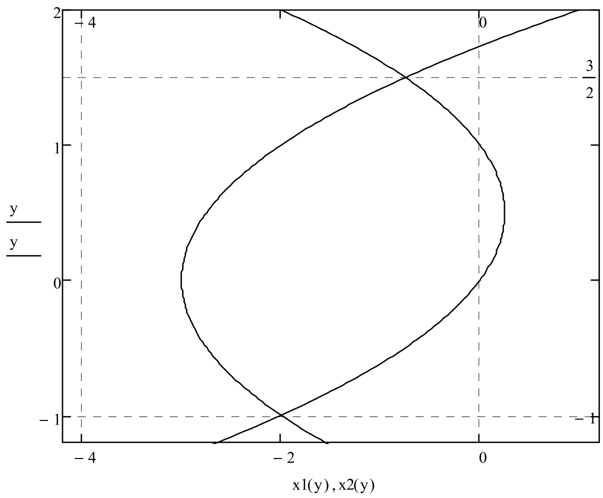
Para más información acceda a la página y descargue la presentación power point "Solido en Revolución"

8.- Halle el volumen del solido generado por la región limitada por las curvas $x = y^2 - 3$ y $x = -y^2 + y$ y al girar alrededor de la recta $x = -4$.

Solución.

$x1(y) := y^2 - 3$ $\qquad\qquad$ $x2(y) := -y^2 + y$

Hallamos la intersección de las funciones esto es en $\quad y = -1 \qquad y = \frac{3}{2}$



Luego integramos con respecto al eje (y) pero los radios son medida al eje de rotación.

Radio MAYOR. $\quad RM = \left(4 + y - y^2\right)$

Radio MENOR $\quad Rm = \left(4 + y^2 - 3\right)$

Luego: Por método de ARANDELAS. Se tiene

$$\left(4 + y - y^2\right)^2 - \left(4 + y^2 - 3\right)^2 \text{ expand } \rightarrow 8\cdot y - 9\cdot y^2 - 2\cdot y^3 + 15$$

Luego la integral que expresa el Volumen, Sera

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \pi\cdot\left(8\cdot y - 9\cdot y^2 - 2\cdot y^3 + 15\right) dy \rightarrow \frac{875\cdot\pi}{32}$$

9.- Halle $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ si

$$f(x) = \int_{2x}^{5x^2} x^2 \sin(3t)\, dt$$

Solución.

Buscamos la derivada primero de la función.

$$f(x) = \int_{2x}^{0} x^2 \sin(3t)\, dt + \int_{0}^{5x^2} x^2 \sin(3t)\, dt$$

Derivando

$$f'(x) = -\left(2x\int_0^{2x} \sin(3t)\, dt + x^2 \sin(6x)\,(2)\right) + 2x\int_0^{5x^2} \sin(3t)\, dt + x^2 \sin(15x^2)\,(10x)$$

Simplificando

$$f'(x) = 2x^2(5xsin(15x^2) - \sin(6x)) + 2x\left(\int_0^{5x^2} \sin(3t)\,dt - \int_0^{2x} \sin(3t)\,dt\right)$$

Sustituyendo el valor que se pide la función derivada.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{5}{2}\pi \sin\left(\frac{15}{4}\pi^2\right) - \sin(3\pi)\right) + \pi\left(\int_0^{\frac{5}{4}\pi^2} \sin(3t)\,dt - \int_0^{\pi} \sin(3t)\,dt\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{4}\pi^3 \sin\left(\frac{15}{4}\pi^2\right) + \frac{\pi}{3}\left(-\cos(3t)_0^{\frac{5}{4}\pi^2} - \cos(3t)_0^{\pi}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{4}\pi^3 \sin\left(\frac{15}{4}\pi^2\right) - \frac{\pi}{3}\left(cos\left(\frac{15}{4}\pi^2\right) + 1\right)$$

10.- Integre

$$a. - \int_{-1}^{3} |x^2 - 4|dx$$

Solución.

Dividiendo el intervalo para definir la función valor absoluto. Se tendrá.

$$I = \int_{-1}^{2} -(x^2 - 4)dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 4)dx \quad => \quad I = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)_2^3$$

$$I = 8 - \frac{8}{3} - \left(-4 + \frac{1}{3}\right) + (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) \quad => \quad I = \frac{34}{3}$$

$$b. - \int \left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}}{u^2}\right)^2 du$$

Solución.

Desarrollamos el numerador por el producto notable.

$$I = \int \frac{u + 2u^{\frac{5}{6}} + u^{\frac{2}{3}}}{u^4} du \quad => \quad I = \int u^{-3} + 2u^{-\frac{10}{6}} + u^{-\frac{10}{3}} du$$

$$I = -\frac{u^{-2}}{2} - 3u^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}u^{-\frac{7}{3}} + C$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIAS DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 10-02-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Halle la derivada de y'

$$a.-\ e^{x+y} = 4 + x + y$$

Solución. Derivamos Implícitamente

$D_x(e^{x+y} = 4 + x + y) = e^{x+y}\big(1 + D_x(y)\big) = 1 + D_x(y) => e^{x+y} - 1 = y'(1 - e^{x+y})$

$y' = \dfrac{e^{x+y} - 1}{1 - e^{x+y}}\ \ =>\ \ y' = -1$

$$b.-\ y = 5\sinh^5(x) + x^2\cosh(3x) - x\,\text{arcsinh}(x^3)$$

Solución.

$y' = 5(5\sinh^5(x))\cosh(x) + 2x\cosh(3x) + x^2\sinh(3x)\,3 - \left(\text{arcsinh}(x^3) + \dfrac{x}{\sqrt{x^6+1}}(3x^2)\right)$

$$c.-\ y = \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$$

Solución. Tomamos neperiano. $\ln(y) = x\ln(ln(x)) - \ln(x)\ln(x)$ y derivamos

$$\frac{y'}{y} = \ln(ln(x)) + \frac{x}{\ln(x)}\frac{1}{x} - \frac{2(\ln(x))}{x} \qquad ; \qquad y' = \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}\left(\ln(ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x}\ln(x)\right)$$

2.- Halle el valor de la integral definida.

$$\int_1^e \frac{\ln\left(\sqrt{xe^x}\right)}{3x}dx$$

Solución, integramos indefinida.

$$\int \frac{\frac{1}{2}(\ln(x) + x)}{3x}dx = \int \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{3x} + \frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}\frac{1}{2}\ln^2(x) + \frac{1}{6}x + C$$

Evaluamos en los límites

$$I = \frac{1}{12}\ln^2(e) + \frac{1}{6}e - \left(\frac{1}{12}\ln^2(1) + \frac{1}{6}1\right) \Rightarrow \quad I = \frac{1}{6}\left(e - \frac{1}{2}\right)$$

3.- Resuelva la integral.

$$a.- \quad \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4 - e^{6x}}}dx$$

Solución. Sea $u = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad du = 3e^{3x}dx$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} \Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{2}\right)^2}} \quad \text{sea a} = \frac{\text{u}}{2} \Rightarrow \quad \text{da} = \frac{\text{du}}{2} \quad ; \; I = \frac{1}{3}\int \frac{da}{\sqrt{1 - a^2}}$$

$$I = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{e^{3x}}{2}\right) + C$$

$$b.- \quad \int x\coth(x^2)\ln(sinh(x^2))\,dx$$

Solución. Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx\;;\; y \;\; \coth(a) = \frac{\cosh(a)}{\sinh(a)} \;\; se\ tiene$

$$I = \frac{1}{2}\int \cosh(u)\,\frac{\ln(sinh(u))}{\sinh(u)}du \quad ; \; sea \quad a = \ln(sinh(u)) \quad \Rightarrow \quad da = \frac{\cosh(u)}{\sinh(u)}du \;\; ; \;\; I = \frac{1}{2}\int ada$$
$$= \frac{1}{4}a^2 + C$$

$$I = \frac{1}{4}\ln^2(\sinh(x^2)) + C$$

$$e.- \quad \int \frac{2x + 3}{9x^2 - 12x + 8}dx$$

Solución. Sea $u = 9x^2 - 12x + 8 \;\Rightarrow\; du = (18x - 12)dx$ además "$2x + 3 = \frac{1}{9}(18x - 12 + 39)$"

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{18x - 12 + 39}{9x^2 - 12x + 8}dx = \frac{1}{9}\left[\underbrace{\int \frac{18x - 12}{9x^2 - 12x + 8}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{39}{9x^2 - 12x + 8}dx}_{I_2}\right]$$

$$I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|9x^2 - 12 + 8| + C$$

Para I_2 completamos cuadrado, $9\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}\right) = 9\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9}\right)$

$$I_2=\frac{39}{9}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}}\overset{\substack{u=x-\frac{2}{3}\\du=dx}}{\cong}\frac{39}{9}\int\frac{du}{u^2+\frac{4}{9}}=\frac{39.9}{9}\int\frac{du}{9u^2+4}=\frac{39}{4}\int\frac{du}{\frac{9}{4}u^2+1}=\frac{39}{4}\int\frac{du}{\left(\frac{3}{2}u\right)^2+1}\underset{\substack{a=\frac{3}{2}u\\da=\frac{3}{2}du}}{\cong}$$

$$\frac{13}{2}\int\frac{da}{a^2+1}=\frac{13}{2}\arctan(a)+C=\frac{13}{2}\arctan\left(\frac{3}{2}x-1\right)+C$$

$$I=\frac{1}{9}[I_1+I_2]=>I=\frac{1}{9}\ln(9x^2-12x+8)+\frac{13}{18}\arctan\left(\frac{3}{2}x-1\right)+C$$

$$d.-\quad\int e^{2x}\cosh(x)\,dx$$

Solución. Tenemos que $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, luego multiplicamos por e^{2x}

$$I=\int\frac{e^{3x}+e^x}{2}dx\ \ =>\ \ I=\frac{1}{6}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x+C$$

$$e.-\quad\int\operatorname{sech}^4(x)\,dx$$

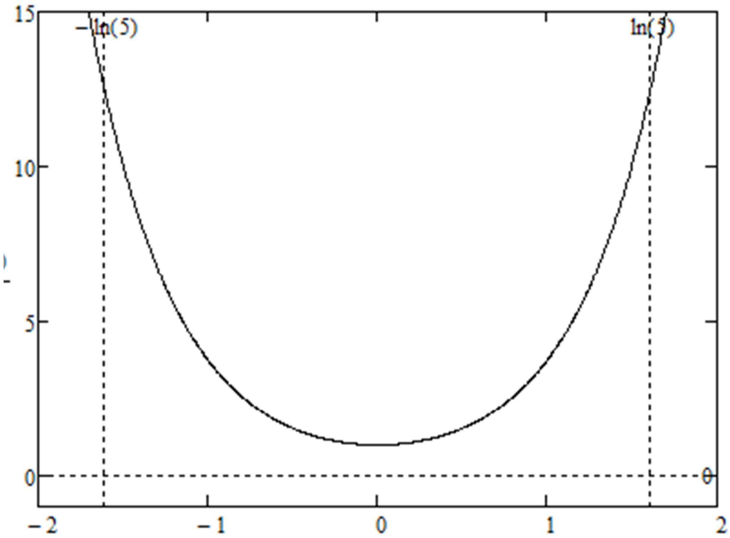
Solución. Sabemos que : $\operatorname{sech}(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$, luego

$$I=\int\frac{2^4}{(e^x+e^{-x})^4}dx=\int\frac{16}{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^4}dx=\int\frac{16e^{4x}}{e^{2x}+1}dx\quad;\quad u=e^{2x}+1=>\ du=2e^{2x}dx$$

$$I=16\int\frac{u-1}{u^4}\frac{1}{2}du\ =8\int\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^4}du=8\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{u^3}\right)+C$$

$$I=\ -\frac{4}{(e^{2x}+1)^2}+\frac{8}{3}\frac{1}{(e^{2x}+1)^3}+C$$

4.- Halle el área limitada por $y = \cosh(2x)$; $y = 0$; $x = -\ln(5)$; $x = \ln(5)$.



El área limitada por las curvas será la integral de la función hasta el límite inferior $y = 0$.

$$A = \int_{-\ln(5)}^{\ln(5)} \cosh(2x)\, dx$$

Resolvemos la integral.

$$I = \int \cosh(2x)\, dx = \frac{1}{2}\sinh(2x) + C$$

Evaluamos en los límites

$$A = \frac{1}{2}(\sinh(2\, ln(5)) - \sinh(-2\, ln(5))) = \frac{312}{25}$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIAS DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 17-02-2012
Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Integre

$$a.- \quad \int x^2 \arctan(x)\, dx$$

Solución. Integración por parte donde; $u = \arctan(x) \;=>\; du = \frac{dx}{1+x^2}$; $dv = x^2 dx => v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int x^2 \arctan(x)\, dx = \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \underbrace{\int \frac{x^3}{3(1+x^2)} dx}_{I_1}$$

Para I_1 dividimos la fracción.

$$I_1 = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Entonces $I = \frac{x^3}{3}\arctan(x) + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{6} + C$

$$b.- \quad \int \frac{x \ln(3x^2+4)}{3x^2+4} dx$$

Solución. La resolveremos por medio de integración por partes. Donde

$$u = \ln(3x^2+4) \;=>\; du = \frac{6x}{3x^2+4}dx \;\;;\;\; dv = \frac{x}{3x^2+4}dx \;=>\; v = \frac{1}{6}\ln(3x^2+4)$$

$$I = \frac{1}{6}\ln^2(3x^2+4) - \underbrace{\int \frac{xln(3x^2+4)}{3x^2+4} dx}_{I} + C \;=>\; I = \frac{1}{6}\ln^2(3x^2+4) - I + C => \; 2I = \frac{1}{6}\ln^2(3x^2+4) + C$$

Luego $I = \frac{1}{12}\ln^2(3x^2+4) + C$

$$c.- \quad \int x^3\left(e^{x^2} + e^{x^4}\right)dx$$

Solución. Distribuimos y tenemos que

$$\int x^3\left(e^{x^2} + e^{x^4}\right)dx = \overbrace{\int x^3 e^{x^2} dx}^{I_1} + \overbrace{\int x^3 e^{x^4} dx}^{I_2}$$

Para I_2, cambio de variable, Sea $u = x^4 \;=>\; du = 4x^3dx$ luego $I_2 = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$

Para I_1, integración por partes, sea $u = x^2 \;=>\; du = 2xdx\;;\; dv = xe^{x^2}dx => v = \frac{1}{2}e^{x^2}$

$$I_1 = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}\int x\, e^{x^2}dx \;=\; \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\textbf{Luego}\;\; I = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{x^2} + \frac{1}{4}e^{x^4} + C$$

$$d. - \int \sin(ln(x^2))\, dx$$

Solución.

Sea la sustitución $u = \ln(x) \;=> du = \frac{dx}{x}$, se tendrá que

$$I = \int \sin(2\, ln(x))\, dx \quad => \quad I = \int \sin(2u)\, xdu \quad => \quad I = \int e^u \sin(2u)\, du$$

Por lo que ahora procedemos a integrar por partes sea:

$$a = \sin(2u) \quad dv = e^u du \quad => \quad da = \cos(2u)\, 2du \quad v = e^u$$

$$I = e^u \sin(2u) - 2\underbrace{\int e^u \cos(2u)\, du}_{I_1}$$

Otra vez por partes para I_1

$$b = \cos(2u) \quad dv = e^u du \quad => \quad db = -\sin(2u)\, 2du \quad v = e^u$$

$$I_1 = e^u \cos(2u) - 2\int e^u \sin(2u)\, du$$

Sustituyendo se tendrá que

$$I = e^u \sin(2u) - 2\left(e^u \cos(2u) - 2\underbrace{\int e^u \sin(2u)\, du}_{I}\right)$$

Despejando

$$4I + I = e^u(\sin(2u) - 2\cos(2u)) \quad => \quad I = \frac{e^u}{5}(\sin(2u) - 2\cos(2u))$$

Regresando cambio de variable se tiene

$$\boldsymbol{I = \frac{x}{5}\left(\sin\left(\ln\left(x^2\right)\right) - 2\cos\left(\ln\left(x^2\right)\right)\right)}$$

2.- Halle el valor de la integral definida

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}dr$$

Solución.

Buscamos la integral indefinida, la resolvemos por integración por parte.

$$I = \int r^2 \frac{r}{\sqrt{4+r^2}}dr$$

Sea $u = r^2 \;\; => \;\; du = 2rdr \;\; ; \;\; dv = \frac{r}{\sqrt{4+r^2}}dr \;\; => \;\; v = \sqrt{4+r^2}$

$$I = r^2\sqrt{4+r^2} - \int 2r\sqrt{4+r^2}dr$$

Seguimos integrando ahora cambio de variable $u = 4 + r^2 \;\; => \;\; du = 2rdr$

$$I = r^2\sqrt{4+r^2} - \frac{2}{3}(4+r^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

Evaluamos en los límites

$$V = \left(\sqrt{5} - \frac{2}{3}(5)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(-\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) \; = \frac{16}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{5}$$

3.- Halle la fórmula de reducción de potencia para

$$\int (x^2+a^2)^n dx$$

Solución.

Integración por partes, sea $u = (x^2+a^2)^n \;\; => \;\; du = n(x^2+a^2)^{n-1}2x\,dx \;\; ; dv = dx => x = v$

$$I = x(x^2+a^2)^n - \int n(x^2+a^2)^{n-1}(2x^2)dx$$

Observamos que $x^2 = (x^2+a^2) - a^2$, luego

$$I = x(x^2+a^2)^n - 2n\int (x^2+a^2)^{n-1}\big((x^2+a^2) - a^2\big)dx$$

$$I = x(x^2+a^2)^n - 2n\left[\underbrace{\int (x^2+a^2)^n dx}_{I} - \int a^2(x^2+a^2)^{n-1}dx\right]$$

$$I + 2nI = x(x^2+a^2)^n + 2na^2\int (x^2+a^2)^{n-1}dx$$

$$\boldsymbol{I = \frac{x\left(x^2+a^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{1+2n}\int \left(x^2+a^2\right)^{n-1}dx}$$

4.- Halle la fórmula de reducción de potencia para

$$\int (\sec(x))^n dx$$

Solución.

Separamos de manera adecuada

$$\int \sec^{n-2}(x)\sec^2(x)\,dx$$

Integración por partes, sea $u = \sec^{n-2}(x) \;\; => \;\; du = (n-2)\sec^{n-3}(x)\sec(x)\tan(x)\,dx$

$dv = \sec^2(x)\,dx \;\; => \;\; v = \tan(x)$

$I = \tan(x)\sec^{n-2}(x) - (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\tan^2(x)\,dx$

$I = \tan(x)\sec^{n-2}(x) - (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\,(\sec^2(x)-1)dx$

$I = \tan(x)\sec^{n-2}(x) - (n-2)\left[\underbrace{\int \sec^n(x)\,dx}_{I} - \int \sec^{n-2}(x)\,dx\right]$

$I + (n-2)I = \tan(x)\sec^{n-2}(x) + (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\,dx$

$$\boldsymbol{I = \frac{\tan(x)\sec^{n-2}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\,dx}$$

5.- Integre con la sustitución adecuada.

$$a.- \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

Solución. Sea $u^3 = x \;\; => 3u^2du = dx$, aplicamos cambio de límites. $\begin{cases} x \to 0 \;\; => u \to 0 \\ x \to 1 \;\; => u \to 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \frac{3u^2}{1+u}du => I = 3\int_0^1 u - 1 + \frac{1}{1+u}du \;\; => \;\; I = 3\left(\frac{u^2}{2} - u + \ln(u+1)\right)_0^1$$

$$I = 3\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln(2)\right) \;\; => \;\; I = 3\ln(2) - \frac{3}{2}$$

$$b.- \int \frac{1}{x - \sqrt{x-2}}dx$$

Solución. Sea el cambio de variable. $u^2 = x - 2 \quad => \quad 2udu = dx$, aplicamos

$$I = \int \frac{2u}{u^2 + 2 - u} du \quad => \quad I = \int \frac{2u - 1 + 1}{u^2 - u + 2} du \quad => \quad I = \int \frac{2u - 1}{u^2 - u + 2} + \frac{1}{u^2 - u + 2} du$$

$$I_1 = \int \frac{2u - 1}{u^2 - u + 2} du \quad CV\colon\ a = u^2 - u + 2 \ ;\ da = (2u - 1)du \quad => \quad I_1 = \ln(u^2 - u + 2) + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{1}{u^2 - u + 2} du \ \ Completamos\ cuadrados.\ I_2 = \int \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4}} du => I_2 = \int \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} du$$

Sea el cambio de variable. $a = u - \frac{1}{2} \quad => \quad da = du$

$$I_2 = \int \frac{1}{a^2 + \frac{7}{4}} da \quad => \quad I_2 = \frac{4}{7} \int \frac{1}{\frac{4}{7} a^2 + 1} da = \frac{4}{7} \int \frac{1}{\left(\frac{2a}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} da \quad CV \quad z = \frac{2a}{\sqrt{7}} \quad => \quad dz = \frac{2}{\sqrt{7}} da$$

$$I_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz \quad => \quad I_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{x - 2} - \frac{1}{2}\right)\right) + C_2$$

$$SOLUCION. \quad I = \ln\left(x - \sqrt{x - 2}\right) + \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{x - 2} - \frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$c. - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}} dx$$

Solución. Cambio de variable. $u^{12} = x \quad => \quad 12u^{11}du = dx$

$$I = \int \frac{12u^{11}}{u^4 + u^3} du = 12 \int \frac{u^8}{u + 1} du = 12 \int u^7 - u^6 + u^5 - u^4 + u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u + 1} du$$

$$I = 12\left(\frac{u^8}{8} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - u + \ln(u + 1)\right) + C$$

$$I = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{7} \sqrt[12]{x^7} + 2\sqrt{x} - \frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} + 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 12\sqrt[12]{x} + \ln\left(\sqrt[12]{x} + 1\right) + C$$

$$d. - \int x^5 \sqrt{1 - x^3} dx \quad sug\ z^2 = 1 - x^3$$

Solución. Sea el cambio sugerido. $z^2 = 1 - x^3 \quad => \quad 2zdz = -3x^2dx$

$$I = \int (1 - z^2) z \left(-\frac{2}{3} zdz\right) => \ I = -\frac{2}{3} \int z^2 - z^4\, dz \ => \quad I = \frac{2}{3}\left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3}\right) + C$$

$$I = \frac{2}{3}\left(\frac{z^3(3z^2 - 5)}{15}\right) + C \quad => \quad I = \frac{2}{45}\left(\sqrt{(1 - x^3)^3}(3(1 - x^3) - 5)\right) + C$$

$$e.- \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx \qquad sug \quad u = \sqrt[6]{x}$$

Solución. Usando la sugerencia, se tiene $du = \frac{1}{6}\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)dx$; $\quad x = u^6 \quad => \quad dx = 6u^5 du$

$$I = \int \frac{6u^5}{u^3-u^2}du \;=> I = 6\int \frac{u^3}{u-1}du \;\; => \;\; I = 6\int u^2+u+1+\frac{1}{u-1}du$$

$$I = 6\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+u+\ln(u-1)\right)+C$$

$$f.- \quad \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\frac{dx}{1-x} \qquad sug \quad t^2 = \frac{x}{1-x}$$

Solución. Usamos la sugerencia dada; $2tdt = \frac{1}{(1-x)^2}dx$

$$I = \int t\big(2t(1-x)\big)dt \quad ; \quad (1-x) = \frac{x}{t^2} <= \;\; (sug)$$

$$I = \int 2t^2\left(\frac{x}{t^2}\right)dt \;=\; \int 2xdt$$

Buscamos (x) de la sugerencia.

$$t^2 = \frac{x}{1-x} \;=>\; t^2(1-x) = x \;=>\; t^2 = x + t^2x \;=>\; t^2 = x(1+t^2) => \; x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$I = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt \;=>\; I = 2\int 1-\frac{1}{1+t^2}dt \;=>\; I = 2t - 2\arctan(t)+C$$

$$I = 2\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)\right)+C$$

6.- Resuelva la siguiente ecuación.

$$\ln(x^2-2)-\ln(x+4) = \ln(-x)$$

Solución. Buscamos dominio de (x)

$$\begin{cases} x^2-2>0 \\ x+4>0 \\ -x>0 \end{cases} => \;\; x \in \left(-4,-\sqrt{2}\right) \quad ; \ln\left(\frac{x^2-2}{x+4}\right) = \ln(-x) \;=>\; \frac{x^2-2}{x+4} = -x$$

$$x^2-2 = -x^2-4x \;\;=>\;\; 2x^2+4x-2=0 \;\;=>\;\; x = -1\pm\sqrt{2} \;\;=>\;\; \boldsymbol{x_{sol} = -1-\sqrt{2}}$$

7.- Resuelva

$$\ln(2x-1) = \ln(x^2-16)$$

Solución. $\qquad \boldsymbol{x = 5}$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIAS DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 24-02-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Integre

$$a.- \quad \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$$

Solución.

Sea la sustitución $u = x^2 \quad => \quad du = 2xdx$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1-u}{1+u^2}du \quad => \quad I = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+u^2}du - \int \frac{u}{1+u^2}du\right) \quad => \quad I = \frac{1}{2}\left(\arctan(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right) + C$$

$$I = \frac{1}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

$$b.- \quad \int \frac{\log_3(x) - 3}{xln(x)}dx$$

Solución.

Aplicando propiedades de logaritmo general se tiene

$$I = \int \frac{\left(\frac{\ln(x)}{\ln(3)} - 3\right)}{x\ln(x)}dx \quad => \quad I = \int \frac{1}{xln(3)} - \frac{3}{x\ln(x)}dx \quad => \quad I = \frac{1}{\ln(3)}\ln(x) - 3\ln(\ln(x)) + C$$

$$I = \log_3(x) - 3\ln(\ln(x)) + C$$

$$c.- \quad \int \frac{1+e^{-2t}}{1-e^{-2t}}dt$$

Solución.

Multiplicando por e^t en el numerado y denominador se tiene

$$I = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}dt$$

Haciendo la sustitución $u = e^t - e^{-t} \quad => \quad du = (e^t + e^{-t})dt$

$$I = \int \frac{du}{u} \quad => \quad I = \ln(u) + C \quad => \quad I = \ln(e^t - e^{-t}) + C$$

$$d.- \int \frac{\ln(3x)}{xln(9x)}dx \quad x>0$$

Solución.

Aplicando propiedades de neperiano.

$$I=\int \frac{\ln(3)+\ln(x)}{x(\ln(9)+\ln(x))}dx$$

Haciendo la sustitución $u=\ln(x) \quad => \quad du=\frac{dx}{x}$

$$I=\int \frac{(\ln(3)+u)}{\ln(9)+u}du \quad => \quad I=\underbrace{\int \frac{\ln(3)}{\ln(9)+u}du}_{I_1}+\underbrace{\int \frac{u}{\ln(9)+u}du}_{I_2}$$

$$I_1=\ln(3)\,(\ln(\ln(9)+u))+C_1$$

Para I_2 se hace la sustitución $a=\ln(9)+u \quad => \quad da=du$

$$I_2=\int \frac{a-\ln(9)}{a}da \quad => \quad I_2=a-\ln(9)\ln(a)+C_2 \quad => \quad I_2=\ln(9)+u-\ln(9)\ln(\ln(9)+u)+C_2$$

Donde

$$I=\ln(3)\ln(\ln(9\ln(x)))+\ln(9)+\ln(x)-2\ln(3)\ln(\ln(9\ln(x)))+C$$

$$I=\ln(x)-\ln(3)\ln(\ln(9\ln(x)))+C$$

2.- Haciendo uso de la derivacion logaritmica derive

$$y=\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2x+1}}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solución.

Aplicando logaritmo para bajar la potencia, tenemos

$$\ln(y)=\frac{1}{x}\left(\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(2x+1)\right)$$

Derivando

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\left(\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(2x+1)\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\frac{1}{2x+1}2\right)$$

Por lo que

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2x+1}}\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\left(\ln\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2x+1}}\right)\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}\right)\right)$$

3.- Sea

$$y = (\cosh(5x))^{2^{x^2+1}}$$

Halle y’

Solución.

Aplicando logaritmo

$$\ln(y) = 2^{x^2+1}\ln(\cosh(5x))$$

Derivando

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2^{x^2+1}(2x)\ln(2)\ln(\cosh(5x)) + 2^{x^2+1}\frac{1}{\cosh(5x)}\sinh(5x)\,5$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = (\cosh(5x))^{2^{x^2+1}}\left(2^{x^2+1}\left(2xln(2)\ln(\cosh(5x)) + 5\tanh(5x)\right)\right)$$

4.- Demuestre la identidad

$$\sinh(x) - \sinh(y) = 2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Y calcule $\int \sinh(6x)\cosh(6x)\,dx$

Solución.

Desarrollamos el termino de la derecha

$$2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\,\frac{e^{\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{(x-y)}{2}}}{2}\left(\frac{e^{\frac{x+y}{2}} + e^{-\left(\frac{x+y}{2}\right)}}{2}\right) =$$

$$\frac{e^{\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}} + e^{\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{2}}}{2} = \frac{e^x - e^{-x} - e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{(e^y - e^{-y})}{2}$$

Por lo que se concluye

$$2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sinh(x) - \sinh(y)$$

Para la integral observamos que

$$\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \approx \sinh(6x)\cosh(6x) \quad donde\ \frac{x-y}{2} = 6x\ \ y\ \frac{x+y}{2} = 6x$$

Despejando se tiene

$$x = 12x \quad y \quad y = 0$$

Por lo que utilizando la identidad

$$\sinh(6x)\cosh(6x) = \frac{1}{2}(\sinh(12x) - \sinh(0))$$

Se tiene

$$\int \sinh(6x)\cosh(6x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sinh(12x) - \sinh(0)\,dx = \frac{1}{24}\cosh(12x) + C$$

5.- Integre

$$a. - \quad \int \frac{9}{\sin(2t)\ln(tan(t))}dt \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Solución.

Sea la sustitución $u = \ln(\tan(t))$ => $du = \frac{1}{\tan(t)}\sec^2(t)\,dt$ simplifique $du = \frac{1}{\sin(t)\cos(t)}dt$

Por lo que

$$I = \frac{9}{2}\int \frac{1}{u}du \quad => \quad I = \frac{9}{2}\ln(u) + C \quad => \quad I = \frac{9}{2}\ln(\ln(\tan(t)) + C$$

6.- Demuestre que

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

Solución.

Desarrollamos el lado derecho

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{(e^y - e^{-y})}{2}\right)$$

Multiplicando

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{(e^y - e^{-y})}{2}\right)$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-(x+y)}}{2} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}$$

Por lo que

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x+y)$$

7.- Resuelva la siguiente ecuación.

$$\ln(x-2)-\ln(x^2-4)=\ln(6)+\ln(2)$$

Solución. Buscamos dominio de (x)

$$(1)\ \ x-2>0 \ \ => \ \ x>2 \qquad (2)\ \ x^2-4>0 \ \ => \ \ x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$$

Por lo que le dominio de la ecuación es

$$Dom(x)\in(2,\infty)$$

Resolvemos aplicando propiedades de los neperianos

$$\ln\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\ln(12)$$

Aplicando exponencial

$$e^{\ln\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)}=e^{\ln(12)} \quad => \quad \frac{x-2}{x^2-4}=12 \quad => \quad x-2=12(x^2-4) \quad => \quad 12x^2-x-46=0$$

Buscando las raíces

$$x_1=2 \qquad x_2=-\frac{23}{12}$$

Comprobando con el dominio se concluye que NO EXISTE ninguna valor de x que cumpla la ecuación.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIAS DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 2-03-2012
Miguel Guzmán (magt_123@hotmail.com)

1.- Resuelva las integrales.

$$a.- \quad \int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx$$

Solución. Sea $u = \sin(x) \Rightarrow \quad du = \cos(x)\,dx$, y separamos $\sin^2(x)\cos^2(x)\cos(x)$

$$\int \sin^2(x)\,(1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx = \int u^2(1-u^2)du = \int u^2 - u^4 du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

Luego $I = \dfrac{\sin^3(x)}{3} - \dfrac{\sin^5(x)}{x} + C$

$$b.- \quad \int \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(2x)}dx$$

Solución. Recodamos que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, separamos la fracción, tenemos

$$\int \frac{\cos(x)}{2\sin(x)\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2}\csc(x) + \frac{1}{2}\sec(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \csc(x) + \sec(x)\,dx$$

Luego $I = \dfrac{1}{2}(\ln(|csc(x) - ctan(x)|) + \ln(|sec(x) + tan(x)|)) + C$

$$c.- \quad \int \tan^3(2x)\sec^5(2x)\,dx$$

Solución.

Separamos $\tan^2(2x)\sec^4(2x)\tan(2x)\sec(2x)$, cambio de variable $u = \sec(2x) \Rightarrow du = \sec(2x)\tan(2x)\,2dx$

$$\int (\sec^2(2x) - 1)\sec^4(2x)\frac{d\sec(2x)}{2} = \int (u^2-1)u^4\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5}\right) + C$$

Luego $I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sec^7(2x)}{7} - \dfrac{\sec^5(2x)}{5}\right) + C$

$$g.- \int \sin(5x)\sin(2x)\,dx$$

Solución. Recordamos la identidad

$\sin(5x)\sin(2x) = -\frac{1}{2}\left(\cos\left((5+2)x\right) - \cos\left((5-2)x\right)\right)$, entonces

$$I = -\frac{1}{2}\int (\cos(7x) - \cos(3x))dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(7x)}{7} - \frac{\sin(3x)}{3}\right) + C$$

Luego $I = \frac{\sin(3x)}{6} - \frac{\sin(7x)}{14} + C$

$$h.- \int \frac{1}{\cos(x)-1}dx$$

Solución. Se multiplica por la conjugada del denominador y tenemos que

$$I = \int \frac{\cos(x)+1}{-\sin^2(x)}dx = \int \left(-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \csc^2(x)\right)dx = -\left(\underbrace{\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \csc^2(x)\,dx}_{I_2}\right)$$

Para I_2, $\int -\csc^2(x)\,dx = \int d cotan(x) = cotan(x) + C$

Para I_1, cambio de variable $u = \sin(x) \Rightarrow \; du = \cos(x)\,dx$

$$I_1 = \int -\frac{1}{u^2}du = \frac{1}{u} + C$$

Luego $I = \csc(x) + cotan(x) + C$

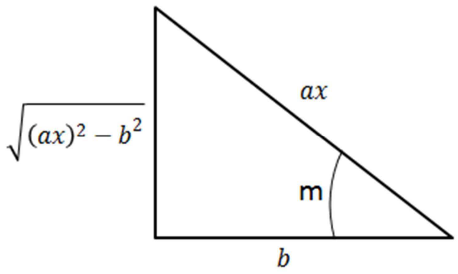
6.- Resuelva las integrales.

$$a.- \int \frac{1}{(a^2x^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Solución. Sea el cambio de variable trigonométrico. $x = \frac{b}{a}\sec(m) \Rightarrow \; dx = \frac{b}{a}\sec(m)\tan(m)\,dm$

$$I = \frac{b}{a}\int \frac{\sec(m)\tan(m)}{\left(b^2(\sec^2(m)-1)\right)^{\frac{3}{2}}}dm = \frac{b}{a}\int \frac{1}{b^3}\frac{\sec(m)\tan(m)}{\tan^3(m)}dm = \frac{1}{ab^2}\int \frac{\sec(m)}{\tan^2(m)}dm = \frac{1}{ab^2}\int \frac{\cos(m)}{\sin^2(m)}dm$$

$I = \frac{1}{ab^2}\left(-\frac{1}{\sin(m)}\right) + C$, debemos regresar a la variable (x) luego por el cambio de varible



$$\sec(m)=\frac{ax}{b}\;=>\;\cos(m)=\frac{b}{ax}$$

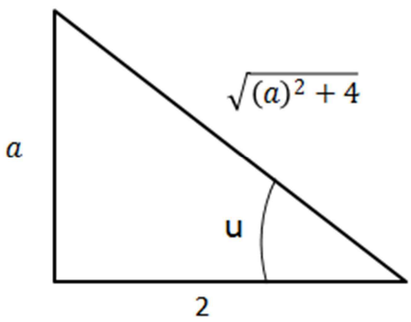
$$I=\frac{1}{ab^2}\left(-\frac{ax}{\sqrt{(ax)^2-b^2}}\right)+C$$

$$b.-\quad\int\frac{1}{\sqrt{t^2-6t+13}}dt$$

Solución. Completamos cuadrado, $t^2-6t+13=(t-3)^2-9+13=(t-3)^2+4$; cambio de variable, sea $a=(t-3)\;=>\;da=dt$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{(t-3)^2+4}}dt\;=>\;I=\int\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}da\qquad cambio\ de\ varible\ \ a=2\tan(u)=>da=2\sec^2(u)\,du$$

$$I=\int\frac{2\sec^2(u)}{\sqrt{4\tan^2(u)+4}}du=\int\frac{\sec^2(u)}{\sec(u)}du=\int\sec(u)\,du=>\;I=\ln(sec(u)+tan(u))+C$$



Regresamos a la variable original (t)

$$\tan(u)=\frac{a}{2}\;=>\tan(u)=\frac{t-3}{2}$$

$$\sec(u)=\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\;=>\;\sec(u)=\frac{\sqrt{t^2-6t+13}}{2}$$

$$I=\ln\left(\frac{\sqrt{t^2-6t+13}}{2}+\frac{t-3}{2}\right)+C$$

$$c.-\quad\int\frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx$$

Solución. Realizamos el cambio de variable, $z=\cos(x)\;=>\;dz=-\sin(x)\,dx$

$$I=\int\frac{-z}{1-z}dz\;=>\;I=-\int\frac{1}{1-z}-1\,dz\;=>\;I=-(-\ln(1-z)-z)+C$$

$$I=\ln(1-cos(x))+\cos(x)+C$$

$$d.- \quad \int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}dx$$

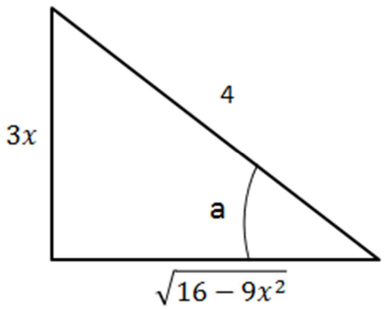
Solución. Sea el cambio de variable $x = \frac{4}{3}\sin(a) \;\; => \;\; dx = \frac{4}{3}\cos(a)\,da$

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{(16-16\sin^2(a))^{\frac{3}{2}}}{\frac{4^6}{3^6}\sin^6(a)}\cos(a)\,da \;\; => \;\; I = \frac{3^5}{4^5}\int \frac{4^3(\cos^3(a))}{\sin^6(a)}\cos(a)\,da => \;\; I = \frac{3^5}{4^2}\int \frac{\cos^4(a)}{\sin^6(a)}da$$

Separamos un poco las funciones trigonométricas y podemos tener que

$$I = \frac{3^5}{16}\int cotan^4(a)\csc^2(a)\,da \;\; ; \;\; cambio \;\; u = ctan(a) => \;\; du = -\csc^2(a)\,da$$

$$I = \frac{3^5}{16}\int -u^4du => \;\; I = \frac{3^5}{16}\left(-\frac{u^5}{5}\right) + C \;\; => \;\; I = \frac{3^5}{16}\left(-\frac{cotg^5(a)}{5}\right) + C$$



Regresamos el cambio de variable;

$$\sin(a) = \frac{3x}{4}$$

$$I = -\frac{3^5}{80}\left(\frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}\right)^5 + C$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIAS DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 9-03-2012
Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.- Integre.

$$a.- \quad \int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$$

Solución. Por medio de fracciones simples, se tiene

$$\frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Donde $A=1, B=0\,, D=1, C=0$

$$I=\int\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2}\right)dx \quad => \quad I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$b.- \quad \int \frac{2x^2-3x+7}{x(x-3)(x-4)}dx$$

Solución. Por método de fracciones simples se tiene

$$\frac{2x^2-3x+7}{x(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-4}$$

Donde $A=\frac{7}{12}$; $B=-\frac{16}{3}$; $C=\frac{27}{4}$

$$I=\frac{7}{12}\int\frac{dx}{x}-\frac{16}{3}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{27}{4}\int\frac{dx}{x-4} \quad => \quad I=\frac{7}{12}\ln(x)-\frac{16}{3}\ln(x-3)+\frac{27}{4}\ln(x-4)+C$$

$$\boldsymbol{c.- \quad \int \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2x+5)^2}\ dx}$$

Solución.

Método de fracciones simples.

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2x+5)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$= \frac{A(x^2+2x+5)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+2x+5)+(Dx+E)(x-1)}{(x^2+2x+5)^2(x-1)}$$

$$= A(x^4+2x^3+5x^2+2x^3+4x^2+20x+5x^2+25)+(Bx+C)(x^3+2x^2+5x-x^2-2x-5)+(Dx^2-Dx+Ex-E)$$

$$= A(x^4+4x^3+14x^2+20x+25)+(Bx^4+Bx^3+3Bx^2-5Bx+Cx^3+Cx^2+3Cx-5C)+Dx^2-Dx+Ex-E$$

$$(x^2-x+1)=(A+B)(x^4)+(4A+B+C)(x^3)+(14A+C+3B+D)(x^2)+(20A-5B+3C-D+E)(x)+(25A-5C-E)$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (1) \\ 4A+B+C=0 & (2) \\ 14A+C+3B+D=1 & (3) \\ 20A-5B+3C-D+E=-1 & (4) \\ 25A-5C-E=1 & (5) \end{cases}$$

$(1) => \ B=-A \quad (6) \qquad (2)(6) => C=-3A \quad (7) \qquad (7)(5) => \ E=40A-1 \quad (8)$

$(6)(7)(8)(3) \ => \ D=1-8A \quad (9)$

$$(6)(7)(8)(9)(4) => \ 20A+5A-9A-1+8A+40A-1=1 \ => \ A=\frac{1}{64}$$

$$B=-\frac{1}{64} \ ; \quad C=-\frac{3}{64} \ ; \quad D=\frac{7}{8} \quad ; \quad E=-\frac{3}{8}$$

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2x+5)^2}\,dx=\underbrace{\frac{1}{64}\int\frac{dx}{x-1}}_{I_1}\underbrace{-\frac{1}{64}\int\frac{(x+3)}{x^2+2x+5}dx}_{I_2}+\underbrace{\frac{1}{8}\int\frac{7x-3}{(x^2+2x+5)^2}dx}_{I_3}$$

$$\boldsymbol{I_1=\frac{1}{64}\int\frac{dx}{x-1}}$$

Sea $u=x-1 \ => \ du=dx$

$$I_1=\frac{1}{64}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{64}\ln(u)+C= \ \underbrace{\frac{1}{64}\ln(x-1)+C_1}_{Resultado\ 1}$$

$$\boldsymbol{I_2=-\frac{1}{64}\int\frac{(x+3)}{x^2+2x+5}dx}$$

$$-\frac{1}{64}\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+2x+5}dx=-\frac{1}{128}\int\frac{2x+2+4}{x^2+2x+5}dx$$

$$=-\frac{1}{128}\left[\underbrace{\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx}_{I_4}+\underbrace{4\int\frac{dx}{x^2+2x+5}}_{I_5}\right]$$

$$I_4=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx$$

Sea $u=x^2+2x+5 \quad => \ du=(2x+2)dx$

$$=\int\frac{du}{u}=\ln(u)+C \quad = \ \underbrace{\ln(x^2+2x+5)+C_2}_{\text{Resultado 2}}$$

$$I_5=4\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Completando cuadrados

$$= 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} \qquad sea \quad u = x+1 \quad => \quad du = dx$$

$$= 4\int \frac{dx}{u^2+4} = \quad 4\,\frac{1}{4}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1} \qquad sea \quad a = \frac{u}{2} \;=>\; 2da = du$$

$$= 2\int \frac{da}{a^2+1} = 2\,arctan(a) + C \quad = \quad \underbrace{2\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C_3}_{Resultado\ 3}$$

$$\boldsymbol{I_3 = \frac{1}{8}\int \frac{7x-3}{(x^2+2x+5)^2}dx}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{7}{2}\int \frac{2x-\frac{6}{7}}{(x^2+2x+5)^2}dx \;=\; \frac{7}{16}\int \frac{2x+2-\frac{20}{7}}{(x^2+2x+5)^2}dx$$

$$= \frac{7}{16}\left[\underbrace{\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx}_{I_6} - \frac{20}{7}\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}}_{I_7}\right]$$

Observación

$$\frac{1}{8}\;7\left(x-\frac{3}{7}\right) \;=\; \frac{7}{2}\left(2x-\frac{6}{7}\right) \quad ; \quad 2+a = -\frac{6}{7} \;=>\; a = -\frac{20}{7}$$

$$I_6 = \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx \qquad sea \quad u = x^2+2x+5 \quad => \quad du = (2x+2)dx$$

$$= \int \frac{du}{u^2} = \; -u^{-1} \;=\; \underbrace{-\frac{1}{x^2+2x+5} + C_5}_{Resultado\ 4}$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} \qquad sea \;\; a = x+1 \quad => \quad da = dx$$

Completando cuadrados.

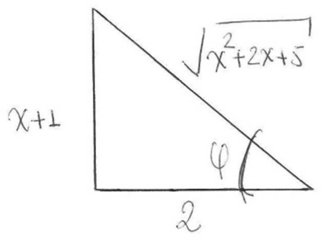
$$= \int \frac{dx}{((x+1)^2+4)^2} = \int \frac{da}{(a^2+4)^2} \qquad sea \quad a = 2\tan(\varphi) => da = 2\sec^2(\varphi)d\varphi$$

$$= \int \frac{2\sec^2(\varphi)}{\left(4(\tan^2(\varphi)+1)\right)^2}d\varphi = \frac{2}{16}\int \frac{\sec^2(\varphi)}{\sec^4(\varphi)}d\varphi \;=\; \frac{1}{8}\int \cos^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}d\varphi$$

$$= \frac{1}{16}\varphi + \frac{1}{16}\frac{\sin(2\varphi)}{2} + C_6$$

Recordando los cambios de variables y el triangulo.

$$\mathrm{Sen}(2\varphi) = 2\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi)$$
$$\mathrm{Sen}(\varphi) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$
$$\mathrm{Cos}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$



$$= \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{16}\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C_6$$

$$\underbrace{= -\frac{20}{7.16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{20}{7.8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5} + C_6}_{Resultado\ 5}$$

$$I_3 = -\frac{7}{16}\left(\frac{1}{x^2+2x+5}\right) + \frac{7}{16}\left(\frac{5}{28}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{5}{14}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right)\right)$$

$$I_3 = -\frac{7}{16}\left(\frac{1}{x^2+2x+5}\right) - \frac{5}{64}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{5}{32}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right) + C_7$$

Por lo tanto se tiene que

$$I = \frac{1}{64}\ln(x-1) - \frac{1}{128}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{64}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{7}{16}\left(\frac{1}{x^2+2x+5}\right) - \frac{5}{64}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{5}{32}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right) + C$$

Note que

$$-\frac{7}{16}\left(\frac{1}{x^2+2x+5}\right) + \frac{5}{32}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right) - \frac{14}{32}\left(\frac{1}{x^2+2x+5}\right) - \frac{5}{32}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right)$$
$$= \frac{1}{32}\left(\frac{-5x-19}{x^2+2x+5}\right)$$

Por lo cual se tiene

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{64}\ln(x-1) - \frac{1}{128}\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{3}{32}arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{5x+19}{x^2+2x+5}\right) + C}$$

4.- Halle la integral

$$\int \frac{\sin(x)\,(4\cos^2(x)-1)}{\cos(x)\,(1+2\cos^2(x)+\cos^4(x))}\,dx$$

Solución. Sea $u = \cos(x) =>\ \ du = -\sin(x)\,dx$

$$I = \int \frac{1-4u^2}{u(1+2u^2+u^4)}du = \int \frac{1-4u^2}{u(u^2+1)^2}du$$

Por el método de fracciones simples tenemos que

$$\frac{1-4u^2}{u(u^2+1)^2} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1} + \frac{Du+E}{(u^2+1)^2} = \frac{A(u^2+1)^2 + (Bu+C)\big(u(u^2+1)\big) + (Du+E)u}{u(u^2+1)^2}$$

$$\frac{1-4u^2}{u(u^2+1)^2} = \frac{(A+B)u^4 + Cu^3 + (2A+B+D)u^2 + (C+E)u + (A)}{u(u^2+1)^2}$$

Tenemos un sistema al igualar los polinomios $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=-4 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Resolvemos para las incógnitas} \\ C=0; A=1; B=-1\ ; E=0; D=-5' \end{cases}$

$$\frac{1-4u^2}{u(u^2+1)^2} = \frac{1}{u} + \frac{-u}{u^2+1} + \frac{-5u}{(u^2+1)^2}$$

$$I = \int \frac{1}{u} + \frac{-u}{u^2+1} + \frac{-5u}{(u^2+1)^2}du = \ln(u) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \frac{5}{2}\,\frac{1}{u^2+1} + C$$

$$I = \ln|\cos(x)| - \frac{1}{2}\ln|\cos^2(x)+1| + \frac{5}{2}\,\frac{1}{\cos^2(x)+1} + C$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIAS DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 16-03-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.-Determine los limites

$$a.- \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \qquad ind\ 1^\infty$$

Solución. Aplicamos neperiano. $\ln(y) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \;=>\; y = e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

Dado a que la función exponencial es continúa

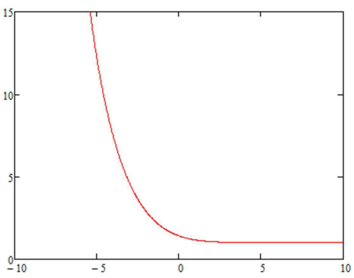
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$, se tiene que

$$L = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \quad ind\ 0.\infty\ ;$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underbrace{\overset{\frac{0}{0}}{=}}_{L'H} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2 \;=>\; \lim_{x\to\infty} y = e^2$$

$$b.- \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\sqrt{1+e^{-t}}dt}{x}$$

Solución. Veamos qué valor tiene la integral impropia, ya que no conocemos ningún medio para integrar observamos la gráfica de la función, además el limite al infinito es 1.



Recordando que la integral es el área bajo la curva, podemos concluir que en el límite infinito el área será infinita. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\sqrt{1+e^{-t}}dt}{x} \underbrace{\overset{\infty/\infty}{=}}_{L'H} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+e^{-x}}}{1} = \sqrt{1}$$

$L = 1$

Si podemos integrar, y dará el mismo resultado.

Si realizamos $u^2 = 1+e^{-t} \;=>\; 2udu = -e^{-t}dt \;=>\; dt = \frac{2u}{1-u^2}du \;=>$

$$I_1 = \int\frac{2u^2}{1-u^2}du \;=>\; I_1 = \ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right) - 2u \;=>\; I_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{-t}}+1}{\sqrt{1+e^{-t}}-1}\right) - 2\sqrt{1+e^{-t}}$$

$$=> I = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}+1}{\sqrt{1+e^{-x}}-1}\right)-2\sqrt{1+e^{-x}}-\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{-1}}+1}{\sqrt{1+e^{-1}}-1}\right)-2\sqrt{1+e^{-1}}\right)\right)=\infty$$

$$c.- \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}} \qquad ind\ 0^0$$

Solución. Tomamos neperiano y tenemos que $\ln(y) = \left(\frac{1}{1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\ln\left(\frac{1}{2x}\right)$

Tomamos límite y tenemos que

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\ln\left(\frac{1}{2x}\right) \quad ind \quad 0.\infty$$

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \underbrace{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}_{L'H} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{2x}}\right)\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}{\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(\frac{1}{2}\right)}{x} = 1 \ => \quad \lim_{x\to\infty} y = e^1$$

$$d.- \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan(x).\ln(\sin(x))) \qquad ind\ \ \infty.0$$

Solución. Tenemos la indeterminación $ind\ 0.\infty$, entonces

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{\tan(x)}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln(sin(x))}{ctan(x)}\right)\underbrace{\overset{0/0}{=}}_{L'H}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{1}{sin(x)}\cos(x)\right)}{-\csc^2(x)} = 0$$

$$e.- \lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

Solución. Tenemos $ind\ \infty-\infty$, entonces

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{xln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)\underbrace{\overset{0/0}{=}}_{L'H} = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{\ln(x)+\frac{x}{x}-1}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\right)\underbrace{\overset{0/0}{=}}_{L'H}\lim_{x\to 1+}\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) => L = \frac{1}{2}$$

2.- Halle el valor de las integrales impropias.

$$a.- \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$$

Solución. Primero integramos la integral indefinida

$$I = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} => \frac{1}{4}\int \frac{2da}{a^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(a) + C => I = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ahora evaluamos en los límites

$$I_1 = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{a}{2}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$b.- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

Solución. Resolvemos la integral indefinida $I_1 = \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u) + C$

Evaluamos en los límites

$$I = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} + \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{b\to-\infty}\arctan(1) - \arctan\left(e^b\right) + \lim_{a\to\infty}\arctan(e^a) - \arctan(1)$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

$$c.- \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}dx$$

Solución. Ante todo la integral es impropia para un valor dentro del intervalo de límites.

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e^x-1}dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$$

Resolvemos la integral indefinida

$$I_1 = \int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + C = \ln(e^x-1) + C$$

Evaluamos en los límites

$$I = \lim_{a\to0}\int_{-1}^{a} \frac{e^x}{e^x-1}dx + \lim_{b\to0}\int_b^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx = \lim_{a\to0}(\ln(e^a-1) - \ln(e^{-1}-1)) + \lim_{b\to0}\left(ln(e-1) - \ln\left(e^b-1\right)\right)$$

$$I = \infty$$

3.- Si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$, la ***Transformada de la Laplace*** de f es la funcion F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

y el dominio de F es considerado todos los numeros s para los cuales la integral converge. Determine la Transformada de Laplace para $f(t) = e^t$

Solucion.

Debemos resolver la integral impropia para los valores de "s" que garantize la convergencia.

$$F(s) = \int_0^\infty e^t\, e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{t(1-s)}\, dt \;\; Integramos \; F(s) = \frac{1}{1-s}\left(e^{t(1-s)}\Big|_0^\infty\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{1-s}\left(e^{\infty(1-s)} - 1\right)$$

Garantizamos convergencia si y solo si $(1-s) < 0 \;\; => s > 1$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \qquad para\; s > 1$$

4.- Encuentre los valores de la constante C para que la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx$$

Converga. Evalue la integral para este valor de C.

Solucion.

Resolvemos la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx = \int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1}\right) dx - C\int_0^\infty \left(\frac{1}{3x+1}\right) dx$$

Se tiene que

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - C\frac{1}{3}\ln(3x+1) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \ln\left(\sqrt[3]{(3x+1)^C}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^C}}\right)$$

Evaluamos en los límites

$$Con = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^C}}\right)_0^\infty = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^C}}\right)_{x=\infty} - 0$$

Debemos asegurar una convergencia para el primer valor, es decir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^C}}=L \text{ Debe existir}$$

Dado que C puede tomar valor que sea necesario, para valores distinto de 3 se mantiene la raíz, si C es mayor que 3 predomina el denominador y el límite será 0 evaluado en el logaritmo será $-\infty$, para valores menores a 3 predomina el numerador por lo tanto el limite será ∞ evaluado en logaritmo se mantiene ∞ para $\boldsymbol{C=3}$ se elimina la raíz y observamos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{(3x+1)}\underbrace{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}_{L'H}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{3}\underbrace{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}_{L'H}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}$$

Luego la integral converge y su límite es $I=-\ln(3)$, para otro valor diverge.

5.- Determine si las integrales convergen o divergen.

$$a.-I=\int_1^\infty\frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

Solución.

Realizamos la integral indefinida

$$I_1=\int\frac{\arctan(x)}{x^2}dx \quad => \quad Sea \quad u=\arctan(x) \quad dv=\frac{1}{x^2}dx \quad => \quad du=\frac{1}{1+x^2}\,dx \quad v=-\frac{1}{x}$$

$$I_1=-\frac{\arctan(x)}{x}+\underbrace{\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx}_{I_2}$$

Para I2 aplicamos fracciones simples

$$I_2=\int\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}dx$$

Donde $A+B=0 \quad A=1 \quad C=0 \quad B=-1$

$$I_2=\int\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}dx \quad => \quad I_2=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_2 \quad => \quad I_2=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C_2$$

Por lo que

$$I_1=-\frac{\arctan(x)}{x}+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C$$

Vamos a la integral impropia

$$I=\lim_{\alpha\to\infty}\int_1^\alpha\frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

Integrando, queda

$$I=\lim_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{\arctan(x)}{x}+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)_1^{\alpha} \quad => \quad I=\lim_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{\arctan(\alpha)}{\alpha}+\ln\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)+\frac{\pi}{4}-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Evaluando límite

$$I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)$$

$b.- \quad \int_1^{\infty}(x+1)e^{-x}dx$

Solución.

Realice la integral indefinida

$$I_1=-e^{-x}(x+2)+C$$

Realizando la integral impropia

$$I=\lim_{a\to\infty}\int_1^a(x+1)e^{-x}dx$$

Nos queda

$$I=\lim_{a\to\infty}-\left(e^{-x}(x+2\,)\right)_1^a \quad => \quad I=\lim_{a\to\infty}-(e^{-a}(a+2\,)-e^{-1}3)$$

Se tiene una indeterminación

$$(*)\ \lim_{a\to\infty}\frac{a+2}{e^a}\underbrace{\overset{\infty/\infty}{=}}_{L'H}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{e^a}=0$$

Por lo que

$$I=3e^{-1}$$

$c.- \quad \int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$

Solución.

Se observa que para $x=\frac{1}{3}$ el denominador no se define, por lo que la integral es impropia

$$I=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}+\int_{\frac{1}{3}}^3\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$$

Realizando la integral indefinida

$$I_1=\int\frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx \quad => \quad I_1=\frac{1}{2}(3x-1)^{\frac{2}{3}}+C$$

Realizando la integral impropia

$$I=\lim_{a\to\frac{1}{3}^-}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}+\lim_{a\to\frac{1}{3}^+}\int_a^3\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$$

Resuelva

$$I=\frac{1}{2}\left(\lim_{a\to\frac{1}{3}^-}(3a-1)^{\frac{2}{3}}-1+\lim_{a\to\frac{1}{3}^+}4-(3a-1)^{\frac{2}{3}}\right) \quad => \quad I=\frac{1}{2}(4-1) \quad => \quad \boldsymbol{I=\frac{3}{2}} \ \boldsymbol{RESP}$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
PREPARADURIAS DE MATEMATICAS
MATEMATICAS 2 (MA-1112) VIERNES 23-03-2012
Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

1.-Resuelva

$$a.- \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx$$

Solución.

Verificamos que el grado del numerador es al menos un grado inferior al denominador. Efectivamente. Procedemos a factorizar denominador

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x} = \frac{x^2+2x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Buscamos los valores de las constantes A B y C mediante igualdad de polinomios

$$A = -3 \quad B = 3 \quad C = 1$$

Por lo que

$$I = \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}dx \;\; => \;\; I = \int -\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1}dx \;\; => \;\; I = -3\ln(x) + 3\ln(x-1) + \ln(x+1) + C$$

$$b.- \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x)$$

Solución.

Se hace presencia de la indeterminación $0.\infty$ por lo que

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \underbrace{=}_{\substack{\frac{0}{0} \\ L'H}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

$$c.- \int \frac{dx}{x^3\sqrt{4x^2-9}}$$

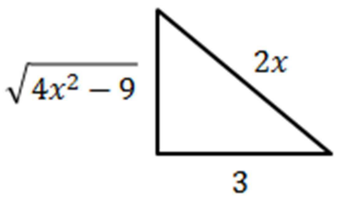
Solución.

Sea la sustitución, $x = \frac{3}{2}\sec(\phi) \quad => \quad dx = \frac{3}{2}\sec(\phi)\tan(\phi)\,d\phi$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{\sec(\phi)\tan(\phi)}{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \sec^3(\phi)\sqrt{9(\sec^2(\phi)-1)}}d\phi \;\; => \;\; I = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \int \frac{\tan(\phi)}{\sec^2(\phi)\,3\tan(\phi)}d\phi \;\; => \;\; I = \frac{4}{27}\int \cos^2(\phi)\,d\phi$$

$$I=\frac{4}{27}\int\frac{1+\cos(2\phi)}{2}d\phi \quad => \quad I=\frac{4}{27}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\sin(2\phi)}{4}\right)+C \quad => \quad I=\frac{4}{27}\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\sin(\phi)\cos(\phi)}{2}\right)+C$$

Del cambio trigonométrico se tiene



$$I=\frac{2}{27}\left(\arccos\left(\frac{3}{2x}\right)+\frac{3\sqrt{4x^2-9}}{4x^2}\right)+C$$

$$d.- \quad \int_1^{\infty}\frac{1+x}{e^x}dx$$

Solución.

Realizamos la integral indefinida, se tendrá que hacer por parte

$$u=x+1 \quad dv=e^{-x}dx \quad => \quad du=dx \quad v=-e^{-x}$$

$$I_1=\int(x+1)e^{-x}dx => \quad I=-(x+1)e^{-x}+\int e^{-x}dx \quad => \quad I=-(x+1)e^{-x}-e^{-x}+C$$

Realizando la integral impropia

$$I=\lim_{\alpha\to\infty}\int_1^{\alpha}(1+x)e^{-x}dx \quad => \quad I=\lim_{\alpha\to\infty}\left(-\left(e^{-x}(x+2)\right)\right)_1^{\alpha} \quad => \quad I=\lim_{\alpha\to\infty}-e^{-\alpha}(\alpha+2)+e^{-1}3=\frac{3}{e}$$

OJOOO el término $\lim_{\alpha\to\infty}-e^{-\alpha}(\alpha+2)$ es indeterminado. Por lo que se debe resolver aparte

$$\lim_{\alpha\to\infty}-\frac{(\alpha+2)}{e^{\alpha}}\underbrace{=}_{\infty/\infty}\lim_{\alpha\to\infty}-\frac{1}{e^{\alpha}}=0$$

$$e.- \quad \int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx$$

Solución.

Se observa que $\sqrt{2}$ es un valor impropio, por lo que

$$I=\lim_{\alpha\to\sqrt{2}^-}\int_0^{\alpha}\frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx$$

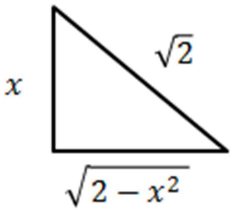
Resolvemos la integral indefinida

$$I_1=\int\frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx$$

Sea la sustitución $x = \sqrt{2}\sin(\alpha)$ $=>$ $dx = \sqrt{2}\cos(\alpha)\,d\alpha$

$$I_1 = \int \frac{2\sin^2(\alpha)\sqrt{2}\cos(\alpha)}{\sqrt{8(1-\sin^2(\alpha))^3}}d\alpha \quad => \quad I_1 = \int \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}d\alpha \quad => \quad I_1 = \int \tan^2(\alpha)\,d\alpha$$

$$I_1 = \sec(\alpha) + C \quad => \quad I_1 = \sqrt{\frac{2}{2-x^2}} + C$$



Regresamos a la integral impropia

$$\lim_{a\to\sqrt{2}^-}\left(\sqrt{\frac{2}{2-x^2}}\right)_0^a = \lim_{a\to\sqrt{2}^-}\sqrt{\frac{2}{2-a^2}} - 1 = \infty \quad DIVERGE$$

$$f.- \int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|}dx$$

Solución

Primero que todo definimos el valor absoluto

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{x}dx}_{I_1}$$

Si resolvemos I1

$$I_1 = \lim_{n\to\infty}(e^x)_0^n \quad => \quad I_1 = \infty\ DIVERGE$$

Por lo que I diverge

$$g.- \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{t}\cos(t)\,dt}{x^2}$$

Solución

Si evaluamos la variable x en la función se tendrá: $\frac{\int_0^0 \sqrt{t}\cos(t)dt}{0} = \frac{0}{0}$

Por lo que podemos aplicar la regla de L-Hopital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{t}\cos(t)\,dt}{x^2} \underbrace{=}_{0/0} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} = \infty$$

2.- Demuestre que

$$\int_{1}^{+\infty} e^{t^2} dt = +\infty$$

Y calcule el limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{x^3} e^{t^2} dt}{x^4}$$

Solución.

Si comparamos la integral podemos demostrar fácilmente el primer resultado

Para $t > 1 =>$ $t < t^2$ por ser la función exponencial continua se tiene $e^t < e^{t^2}$ por lo que

$$\int_{1}^{+\infty} e^{t} dt < \int_{1}^{+\infty} e^{t^2} dt$$

Resolvemos entonces $\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt$, ya realizado en el ejercicio 1.f. Diverge, como es menor a la integral de este ejercicio entonces se concluye que

$$\int_{1}^{+\infty} e^{t^2} dt = +\infty$$

Por comparación ordinaria. Vamos al límite, si evaluamos la función en el limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{x^3} e^{t^2} dt}{x^4} \quad : \quad \frac{\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Por lo que podemos aplicar la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{x^3} e^{t^2} dt}{x^4} \underbrace{=}_{\infty/\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^6} 3}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{x^6} 6x^5}{4} = \infty$$

3.- Encuentre los valores de la constante C para que la integral

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx$$

Converga. Evalue la integral para este Valor de C.

Solución.

Integramos impropia

$$I = \lim_{a\to\infty} \left(-Cln(x+2) + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right)\right)_0^a \;=>\; I = \lim_{a\to\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2(a+2)^C}\right) + Cln(2)$$

Analice que para $C \neq 1\ DIVERGE\ y\ para\ C = 1\ \ CONVERGE$ a $I = \ln(2)$